ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Квадратурные и кубатурные формулы

Методические указания к выполнению лабораторных вычислительных работ по курсу «Квадратурные формулы»

ПЕНЗА 2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»
==

Квадратурные и кубатурные формулы

Методические указания
к выполнению лабораторных вычислительных работ
по курсу «Квадратурные формулы»

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
Университета
2007

УДК 517
К 32

В лабораторных работах изучаются методы приближенного вычисления определенных интегралов как простых, так и кратных. Чтобы облегчить выбор метода интегрирования, дается описание идей, лежащих о основе построения квадратурных формул, что позволяет судить об условиях, при которых взятый метод вычисления может дать хорошую точность результата.

В приложении даны варианты заданий вычисления определенных интегралов по квадратурным формулам.

Методические указания подготовлены на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначены для студентов, изучающих курс «Квадратурные и кубатурные формулы», а также могут быть использованы студентами других специальностей при изучении высшей математики.

Составители: **Н.Ф. Добрынина, Л.Н. Домнин**

Рецензент **А.А. Ловков,** кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой «Алгебра» Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Порядок выполнения работы

1. Получить у преподавателя задание на выполнение очередной работы (вариант и дополнительные указания).
2. Разработать структуру и алгоритм квадратурной формулы.
3. Реализовать алгоритм в виде текста на языке MAthCAD.
4. Подготовить текстовые наборы данных, необходимые для отладки программы и демонстрации ее работоспособности.
5. Отладить полученную программу, используя подготовленные ранее текстовые наборы данных, и сравнить полученные результаты с ожидаемыми. В случае совпадения можно предположить, что программа работает правильно. В противном случае необходимо продолжить отладку программы.
6. Отлаженную программу исполнить в пошаговом режиме с остановками в контрольных точках, тщательно проверяя получаемые промежуточные результаты. Проанализировать полученные конечные результаты.
7. Подготовить и сдать преподавателю отчет о работе.

Постановка задачи численного интегрирования

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Из курса математического анализа известно, что для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f интеграл (1) существует и равен разности значений первообразной F для функции f в точках b и a:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Однако в подавляющем большинстве практических задач первообразную не удается выразить через элементарные функции. Кроме того, функция f часто задается в виде таблицы ее значений для определенных значений аргумента. Все это порождает потребность в приближенных методах вычисления интеграла (1), которые называются численными методами. Они позволяют найти числовое значение интеграла, основываясь на известных значениях подынтегральной функции (а иногда и ее производных), в заданных точках, называемых узлами. Процесс численного определения интеграла называется квадратурой, а соответствующие формулы - квадратурными формулами.

В зависимости от способа задания подынтегральной функции будем рассматривать два различных в смысле их реализации случая численного интегрирования.

Задача 1. На отрезке $[a,b]$ в узлах x_i заданы значения f_i некоторой функции f, принадлежащей некоторому классу F. Требуется приближенно вычислить интеграл (1) и оценить погрешность полученного значения.

Так обычно ставится задача численного интегрирования в том случае, когда подынтегральная функция задана в виде таблицы.

Задача 2. На отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ задана в виде аналитического выражения. Требуется вычислить интеграл (1) с заданной предельно допустимой погрешностью ε.

Один из возможных способов решения сформулированных задач основан на использовании различных квадратурных формул вида

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \equiv I_n \qquad (3)$$

с известным остаточным членом $R_n[f] = I - I_n$ или его оценкой.

В общем случае как узловые точки x_i, так и весовые множители A_i заранее не известны и подлежат определению при выводе каждой конкретной квадратурной формулы (3) на основе предъявляемых к ней требований.

Перейдем к алгоритмам решения сформулированных задач.

Алгоритм решения задачи 1.

1. Выбирают конкретную квадратурную формулу (3) и вычисляют I_n. Если значения функции f_i заданы приближенно, то фактически вычисляют лишь приближенное значение $\bar{I}_n$ для точного значения I_n.
2. Приближенно принимают, что $I \approx \bar{I}_n$.
3. Пользуясь конкретным выражением для остаточного члена или оценкой его для выбранной квадратурной формулы, вычисляют погрешность метода $\Delta_1 = |I - I_n| = |R_n|$.
4. Определяют погрешность вычисления $\bar{I}_n$: $\Delta_2 = |I_n - \bar{I}_n|$ по погрешностям приближенных значений f_i.
5. Находят полную абсолютную погрешность приближенного

значения I_n : $\Delta = |I - \bar{I}_n| \le \Delta_1 + \Delta_2$.

6. Получают решение задачи в виде $I = \bar{I}_n \pm \Delta$..

Для достаточно гладких функций, то есть для функций с ограниченным изменением производных, погрешность квадратурных формул (3) для достаточно больших n , как правило, мала. Поэтому при достаточной точности исходных значений f_i и при достаточной точности вычисления $\bar{I}_n$ можно ожидать, что $\bar{I}_n$ будет хорошим приближением для I. На этих соображениях основан следующий алгоритм.

Алгоритм решения задачи 2.

1. Представляют ε в виде суммы трех слагаемых:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

где ε_1 - предельно допустимая погрешность метода; ε_2 - предельно допустимая погрешность вычисления $\bar{I}_n$; ε_3 - предельно допустимая погрешность округления результата.

2. Выбирают n в квадратурной формуле так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_1 = |I - I_n| = |R_n| \le \varepsilon_1.$$

3. Вычисляют f_i с такой точностью, чтобы при подсчете I_n по формуле (3) обеспечить выполнение неравенства

$$\Delta_2 = |I_n - \bar{I}_n| \le \varepsilon_2.$$

Для этого, очевидно, достаточно вычислить все f_i с абсолют ной погрешностью

$$\frac{\varepsilon}{(b-a)\sum_{i=1}^{n} |A_i|}.$$

4. Найденную в п.3 величину $\bar{I}_n$ округляют (если $\varepsilon_3 \ne 0$) с предельно допустимой погрешностью ε_3 до величины $\bar{I}_n$.

5. Получают решение задачи в виде

$$I = \bar{I}_n \pm \varepsilon.$$

Используемые в алгоритмах обеих задач квадратурные формулы строятся на основании тех или иных критериев, определяющих положение узловых точек и величины весовых множителей. Такими критериями могут быть: представление интеграла в виде интегральной суммы; аппроксимация подынтегральной функции (например, многочленом) и последующее интегрирование аппроксимирующей функции; требование, чтобы формула (3) была абсолютно точной для определенного класса функций.

Лабораторная работа № 1

Простейшие квадратурные формулы
Формула прямоугольников

Как известно, определенный интеграл в силу своего построения есть предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max h_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} h_i f(\xi_i), \qquad (1)$$

каждая из которых соответствует некоторому разбиению D_n: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a,b]$ и произвольному набору точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для каждого разбиения; $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Ограничиваясь конечным числом слагаемых в правой части равенства (1) и принимая в качестве набора ξ_i те или иные значения аргумента из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, получим соответственно *формулу левых* или *правых прямоугольников* ($h_i = {}^{(a-b)}\!/_{n} = const$):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i-0}^{n-1} \frac{f_i}{n} = I_l, \qquad (2)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{n} = I_p. \qquad (3)$$

Названия этих формул связаны с их геометрической интерпретацией. Если в плоскости xOy построить кривую $y = f(x)$, разбить отрезок $[a,b]$ на n частей точками x_i сетки D_n, то формула левых прямоугольников в качестве приближенного значения интеграла даст суммарную площадь заштрихованных прямоугольников на рис.1; а формула правых прямоугольников - суммарную площадь заштрихованных прямоугольников на рис.2.

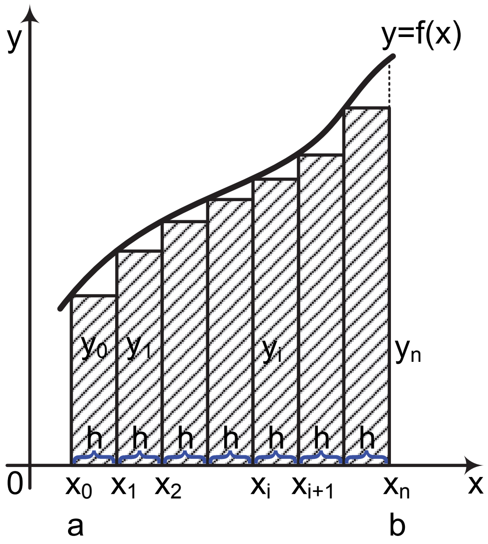

Рис.1.

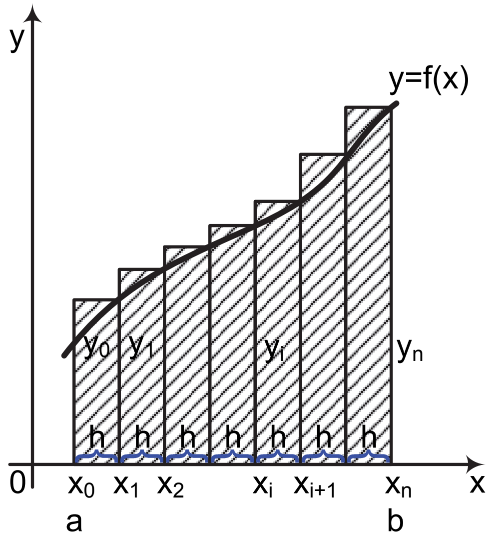

Рис.2.

Наиболее часто используемой формулой, основанной на идее представления определенного интеграла в виде интегральной суммы, является *формула прямоугольников*, где в качестве ξ_i берут середины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Для равномерной сетки $(h_i = h)$ эта формула имеет следующий вид:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{i-1/2} = I_n, \qquad (4)$$

где $f_{i-1/2} = f(x_i - h/2); x_0 = a, x_n = b.$ Остаточный член приближенной формулы (4) имеет вид:

$$\Delta \le \frac{b-a}{24} h^2 M, \qquad (5)$$

где $M = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|.$

Формула трапеций.

Перейдем к другому способу построения квадратурных формул, связанному с аппроксимацией подынтегральной функции на заданном интервале $[a,b]$. Иллюстрацией к этому методу может служить рис.3. Представим функцию в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left[f(b) - f(a)\right] - (x-a)(x-b)\frac{f''(\eta)}{2}; \eta \in (a,b).$$

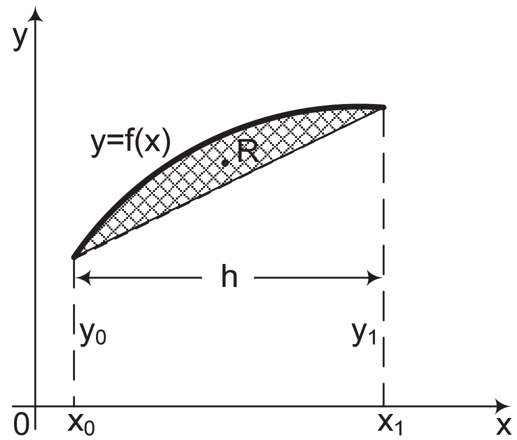

Рис.3.

Интегрируя правую и левую части этого равенства и используя вторую теорему о среднем значении функции при интегрировании последнего слагаемого правой части, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(b) + f(a)\right] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta); \eta \in (a,b).$$

Таким образом, предполагая, что отрезок интегрирования мал, получаем квадратурную формулу, называемую *формулой трапеций*:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] = I_2 \qquad (6)$$

с остаточным членом

$$R[f] = I - I_2 = -\frac{(b-a)^3}{2} f''(\eta); \eta \in (a,b). \qquad (7)$$

Используя выражение (7) для остаточного члена, оценку погрешности квадратурной формулы (6) можно представить в виде

$$\Delta_1 = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) \right| \le \frac{(b-a)^3}{12} M_2, \qquad (8)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

Оценка вычислительной погрешности при расчетах по формуле (6) для случая, когда значения функции с одинаковой точностью ε, имеет вид

$$\Delta_2 \le \frac{b-a}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = (b-a)\varepsilon. \qquad (9)$$

Задание

Вычислить интегралы по квадратурным формулам и оценить погрешности приближенного вычисления. Выяснить для каких функций квадратурная формула (6) является точной. Сравнить вычислительные погрешности квадратурных формул прямоугольников и трапеций.

Лабораторная работа № 2

Интерполяционные методы вычисления интеграловпо значениям функции. Правила Котеса

В лабораторной работе изучаются правила приближенного интегрирования по нескольким значениям функции $f(x)$:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R. \qquad (1)$$

Это равенство считается интерполяционным. Рассмотрим правила приближенных квадратур, для которых выполняется алгебраическое интерполирование функции по ее значениям $x_k, (k = 1,2,\ldots,n)$. Линейная комбинация $S_n(x)$, интерполирующая функцию $f(x)$ является алгебраическим многочленом степени $n-1$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \omega(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Коэффициенты A_k могут быть получены с помощью интегрирования интерполяционных множителей Лагранжа:

$$A_k = \left[\omega'(x_k)\right]^{-1} \int_a^b p(x)\omega(x)(x-x_k)^{-1} dx. \qquad (2)$$

Квадратурные формулы с коэффициентами вида (2) характеризуются требованием, чтобы равенство (1) выполнялось точно всякий раз, когда $f(x)$ есть произвольно взятый алгебраический многочлен степени, не большей $n-1$.

Выражение для остаточного члена R получается из представления остатка алгебраического интерполирования по значениям функции

$$R = (n!)^{-1} \int_a^b p(x)\omega(x) f^{(n)}(\xi) dx, \qquad (3)$$

где величина ξ зависит от значения переменной x.

Каждая интерполяционная формула (1)-(2) определяется расположением узлов $x_i (i = 1,\ldots,n)$. Простейшим случаем является тот, когда функция $f(x)$ дана на равноотстоящих точках. Пусть отрезок интегрирования $[a,b]$ конечный и предположим, что он разделен на n равных частей с шагом $h = {(b-a)}/{n}$. Будем считать, что интегрируемая функция $f(x)$ известна в точках $x_k = a + kh.$ Если все $x_k\,(k = 0,1,\ldots,n)$ без исключения принять за узлы квадратурной формулы, то формула будет иметь следующий вид:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(a+kh), \tag{4}$$

$$A_k = (b-a)\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\int_0^n p(a+ht)\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-k}dt.$$

Числа B_k, определенные последним равенством, не зависят от промежутка интегрирования, и для них могут быть составлены таблицы значений в случае наиболее часто встречающихся весовых функций $p(x)$. Формулу (4) называют формулой вида Котеса.

Если весовая функция $p(x) = 1$, то квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k f(a+kh) + R. \tag{5}$$

Котесом были вычислены B_k для $n = 1(1)10$ (таблица).

Если число узлов $n+1$ в формуле Котеса (5) нечетное, то алгебраическая степень точности формулы равна $n+1$ и остаток R представим в виде

$$R = \int_a^b f^{(n+2)}(x)K(x)dx,$$

$$K(x) = \frac{(b-x)^n + 2}{(n+2)!} - \frac{b-a}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} B_k E(a+kh-x)(a+kh-x)^n + 1. \tag{6}$$

Числа Бернулли

n =1	$B_o = B_1 = \frac{1}{2}$		
n=2	$B_0 = B_2 = \frac{1}{6}$	$B_1 = \frac{4}{6}$	
n=3	$B_0 = B_3 = \frac{1}{8}$	$B_1 = B_2 = \frac{3}{8}$	
n=4	$B_0 = B_4 = \frac{7}{90}$	$B_1 = B_3 = \frac{32}{90}$	$B_2 = \frac{12}{90}$
n=5	$B_0 = B_5 = \frac{19}{288}$	$B_1 = B_4 = \frac{75}{288}$	$B_2 = B_3 = \frac{50}{288}$
n=6	$B_0 = B_6 = \frac{41}{840}$ $B_3 = \frac{272}{840}$	$B_1 = B_5 = \frac{216}{840}$	$B_2 = B_4 = \frac{27}{840}$
n=7	$B_0 = B_7 = \frac{751}{17280}$ $B_3 = B_4 = \frac{2989}{17280}$	$B_1 = B_6 = \frac{3577}{17280}$	$B_2 = B_5 = \frac{1323}{17280}$
n=8	$B_0 = B_8 = \frac{989}{28350}$ $B_3 = B_5 = \frac{10496}{28350}$	$B_1 = B_7 = \frac{5888}{28350}$ $B_4 = -\frac{4540}{28350}$	$B_2 = B_6 = -\frac{928}{28350}$
n=9	$B_0 = B_9 = \frac{2857}{89600}$ $B_3 = B_6 = \frac{19344}{89600}$	$B_1 = B_8 = \frac{15741}{89600}$ $B_4 = B_5 = \frac{5778}{89600}$	$B_2 = B_7 = \frac{1080}{89600}$
n=10	$B_0 = B_{10} = \frac{16067}{598752}$ $B_3 = B_7 = \frac{272400}{598752}$	$B_1 = B_9 = \frac{106300}{598752}$ $B_4 = B_6 = -\frac{260550}{598752}$	$B_2 = B_8 = -\frac{48525}{598752}$ $B_5 = \frac{427368}{598752}$

При этом $K(x) \le 0 (a \le x \le b)$. На отрезке $[a,b]$ существует число ζ такое, что для R верно равенство

$$R = \frac{f^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!}\int_a^b x\,\omega(x)dx, \qquad (7)$$

$$\omega(x) = (x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh).$$

Если же число $n+1$ четное, то алгебраическая степень точности равна n. Для остатка имеет место представление

$$R = \int_a^b f^{(n+1)}(x)K(x)dx,$$

а ядро остатка можно вычислить по формуле

$$K(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{b-a}{n!}\sum_{k=1}^{n} B_k E(a+kh-x)(a+kh-x)^n$$

и $K(x) \le 0 [a \le x \le b]$.

На отрезке $[a,b]$ существует точка ξ такая, что

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \omega(x)dx.$$

Множитель $\int_a^b \omega(x)dx$ отрицателен.

В приближенном вычислении интегралов применяются формулы Котеса при небольших значениях n.

При $n=1$ равенство (7) будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\right]. \qquad (8)$$

Это простейшая квадратурная формула - «формула трапеций». Она имеет малую точность. Остаточный член

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$

содержит множитель $(b-a)^3$, и если вторая производная f'' мало изменяющаяся функция, то при уменьшении длины отрезка интегрирования $b-a$ в k раз, остаток R уменьшится приблизительно в

k^3 раз. Этим можно воспользоваться для повышения точности результата.

Разделим отрезок $[a,b]$ на некоторое число n равных частей длины $h=(b-a)/n$ (рис.1).

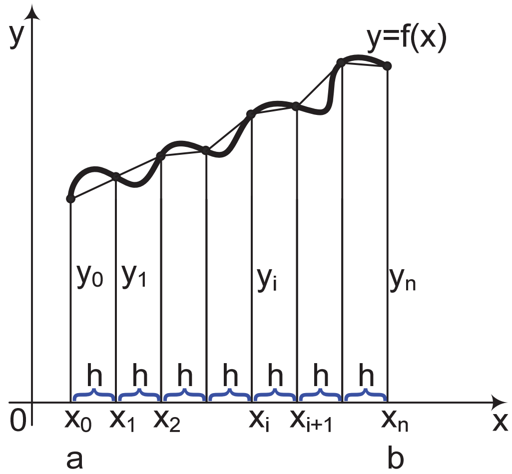

Рис.1.

Если простейшую формулу трапеций применить к каждому из частичных отрезков и сложить результаты, получим «общую формулу трапеций»:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right] - \frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(\xi), \quad (9)$$

$$f_k = f(a+kh).$$

При $n=2$ формула (7) приводит к простейшему правилу парабол (рис.2), то есть к формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f(a+h)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2}\frac{f^{(4)}(\xi)}{90};$$

$$h=\frac{(b-a)}{2}, a<\xi<b.$$

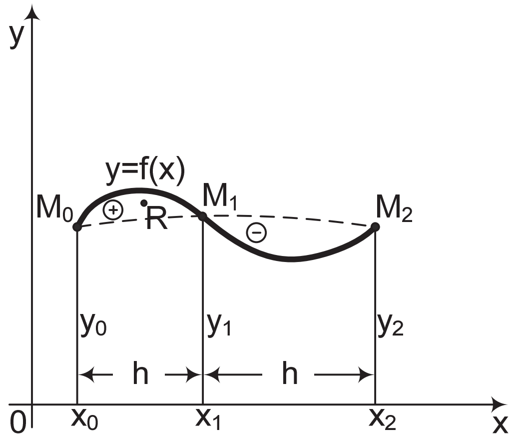

Рис.2

Соответствующая «общая формула парабол» имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}[f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{n-2}) +$$

$$+ 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{n-1})] - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi). \qquad (10)$$

Число n должно быть четным.

Для $n = 3$ из формулы (7) получается ньютоново правило «трех восьмых» в его простейшем виде:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{1}{8}f(a) + \frac{3}{8}f(a+h) + \frac{3}{8}f(a+2h) + \frac{1}{8}f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi),$$

$$h = \frac{b-a}{n}, a \le \xi \le b.$$

«Общее правило трех восьмых» имеет следующую форму:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f_0 + f_n + 2(f_3 + f_6 + f_9 + \ldots) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 + \ldots)\right] - \frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi),$$

$$h = \frac{b-a}{n}, a \le \xi \le b.$$

Число n должно быть кратным 3.

Из сравнения остаточных членов формулы Симпсона и «правила трех восьмых» следует, что погрешность «правила трех восьмых» превосходит погрешность формулы Симпсона приблизительно вдвое.

Задание 1

1. Составить программу вычисления по формуле Котеса при $n = 1$ (по формуле «трапеций»). Вычислить интегралы; определить погрешности R. Увеличить число узлов разбиения в $k = 3$ раз, снова вычислить интегралы и погрешности. Показать, что точность вычислений при увеличении числа узлов разбиения, увеличивается в k^3 раз. Эту операцию провести для двух видов подынтегральных функций, одна из которых гладкая функция.
2. Вычислить интегралы по формуле Симпсона; определить погрешности. Увеличить точность, изменив число n(n - четное число).
3. Вычислить интегралы по «правилу трех восьмых»; определить погрешности. Увеличить точность, изменив число n(n-кратное 3).
4. Вычислить интегралы по формулам Симпсона и «правилу трех восьмых» при числе узлов, кратном 6; определить погрешности и сравнить их.

Особенности коэффициентов A_k делают формулу Котеса при больших n малопригодной для вычислений. Чтобы построить квадратурные формулы, не имеющие этого недостатка и предназначенные для интегрирования функций, заданных в системе равноотстоящих узлов, требуют, чтобы квадратурная формула была интерполяционной и ее коэффициенты A_k определялись из условия, чтобы равенство (1) выполнялось точно для многочленов степени n. Ослабим это условие и будем считать, что равенство (1) будет точным для всех степеней x от нулевой до некоторой степени m, меньшей числа n. Получаем систему $m+1$ уравнений для A_k, остальные $n-m$ остаются произвольными. Так были получены квадратурные формулы Уэддля при $n = 6$:

$\alpha = 1$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{20}\left[f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6\right];$$

$\alpha = 7$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{420}\left[24(f_0 + f_6) + 87(f_1 + f_5) + 66(f_2 + f_3 + f_4)\right];$$

$\alpha = 9$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{420}\left[25(f_0 + f_6) + 81(f_1 + f_2 + f_4 + f_5) + 46f_3\right].$$

Задание2

Вычислить значения интегралов при $n = 6,12,18,24,30$. Определить оценку погрешности при разных значениях n. Построить график изменения погрешности.

Лабораторная работа №3

Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева

Квадратурная формула Гаусса

В этой лабораторной работе рассматриваются правила приближенного интегрирования, имеющие наивысшую алгебраическую степень точности

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \qquad (1)$$

Вес $p(x)$ считается таким, что его произведение на многочлен любой степени есть интегрируемая функция на отрезке $[a,b]$ и, кроме того,

$$\int_a^b |p(x)|dx > 0.$$

Формула содержит $2n$ параметров A_k и $x_k (k = 1,2,\ldots,n)$. Их выбором можно сделать равенство точным для всяких многочленов, имеющих степень не выше $2n-1$. По абсциссам x_k построим многочлен

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^n.$$

Чтобы равенство (1) имело наивысшую алгебраическую степень точности, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. Формула (1) интерполяционная и коэффициенты ее имеют значения
$$A_k = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}dx.$$

2. Многочлен $\omega(x)$ ортогонален на $[a,b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену$Q(x)$ степени, меньшей n:
$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = 0.$$

Если $p(x) \ge 0$, то многочлен $\omega(x)$,удовлетворяющий условию ортогональности, существует для любого n. Такой многочлен единственный, корни его $x_k (k = 1,2,\ldots,n)$ действительны, различны и лежат внутри отрезка $[a,b]$. Наивысшая степень точности $2n-1$. Коэффициенты A_k имеют одинаковые знаки. Погрешность определяется по формуле

$$R_n(f) = \frac{1}{2n!}\int_a^b p(x)\omega^2(x) f^{(2n)}(\xi)d\xi,$$

где $\xi(x) \in [a,b]$.

Если вес $p(x)$ сохраняет свой знак на $[a,b]$, то существует такая точка $\eta \in [a,b]$, что

$$R_n(f) = \frac{f^{92n)}(\eta)}{2n!}\int_a^b p(x)\omega^2(x)dx.$$

Если весовая функция $p(x) = 1$, то получаем квадратурную формулу Гаусса. Она дает наилучшую точность в том случае, когда интегрируемая функция не имеет особенностей на отрезке интегрирования и обладает высоким порядком гладкости. Линейным преобразованием независимой переменной отрезок можно привести к стандартному отрезку $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f).$$

Степень точности равна $2n-1$. Систему многочленов, ортогональных на $[-1,1]$, образуют многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Абсциссы x_k являются нулями многочлена $P_n : P_n(x_k) = 0$. Коэффициенты квадратурной формулы определяются следующим образом:

$$A_k = \frac{2}{\left(1-x_k^2\right)\left[P_n'\left(x_k\right)\right]^2},$$

остаточный член

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 f^{(2n)}(\eta),$$

где $-1 < \eta < 1.$

Выведем квадратурную формулу Гаусса.

Рассмотрим функцию $y = f(t)$, заданную в стандартном интервале $[-1,1]$. Это можно сделать путем линейной замены независимого переменного по формуле

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t.$$

Поставим задачу: как нужно подобрать узлы $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \qquad (2)$$

была точной для всех полиномов $f(t)$ наивысшей возможной степени N. В нашем распоряжении имеются $2n$ постоянных: $t_i, A_i (i = 1,2,\ldots,n),$ а полином степени $2n-1$ определяется $2n$ коэффициентами. Поэтому наивысшая степень многочлена, в общем случае, равна $N = 2n-1.$ Для обеспечения равенства (2) необходимо и достаточно, чтобы оно было верным при

$$f(t) = 1, t, t^2, \ldots, t^{2n-1}.$$

Действительно, полагая

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=-1}^{n} A_i t_i^k, (k = 0,1,2,\ldots,2n-1) \qquad (3)$$

и

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t_k,$$

будем иметь:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k \int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{r=0}^{2n-1} c_k \sum_{i=0}^{n} A_i t_i^k = \sum_{i=0}^{n} A_i \sum_{k=0}^{2n-1} c_k t_i^k = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i).$$

Учитывая соотношения:

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}$$

заключаем, что для решения задачи достаточно определить t_i и A_i из системы $2n$ уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \dfrac{2}{2n-1}, \\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Система (4) нелинейная и ее решение вызывает большие математические трудности. Однако здесь можно применить искусственный прием.

Рассмотрим полиномы

$$f(t) = t^k P_n(t)(k = 0,1,\ldots,n-1),$$

где $P_n(t)$ - полином Лежандра.

Степени этих многочленов не превышают $2n-1$, поэтому на основании системы (4) для них должна быть справедлива формула (2) и справедлива система

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i)(k = 0,1,\ldots,n-1). \qquad (5)$$

С другой стороны, в силу свойства ортогональности полиномов Лежандра выполнены равенства

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = 0 \quad \text{при} \quad k < n,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0, (k = 0,1,\ldots,n-1). \qquad (6)$$

Равенства (6) будут выполняться при любых значениях A_i, если положить

$$P_n(t_i) = 0, (i = 1,2,\ldots,n), \qquad (7)$$

то есть для достижения наивысшей точности квадратурной формулы (2) в качестве узлов t_i достаточно взять нули соответствующего полинома Лежандра. Как известно, эти нули действительны, различны и расположены в интервале $[-1,1]$. Зная абсциссы t_i, можно найти из линейной системы коэффициенты $A_i (i = 1,2,\ldots,n)$. Определитель этой системы есть определитель Вандермонда

$$D = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \neq 0$$

и, следовательно, A_i определяются однозначно.

Формула (2), где t_i - нули многочлена Лежандра $P_n(t)$ и $A_i (i = 1,2,\ldots,n)$ определяются из системы (4), называется квадратурной формулой Гаусса.

В таблице 1 даны приближенные значения узлов t_i и коэффициентов A_i в квадратурной формуле Гаусса для $n = 1,2,\ldots,8$.

Недостаток применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что абсциссы точек t_i и коэффициенты A_i - иррациональные числа. Достоинство – высокая точность при малом числе ординат.

Таблица 1

Элементы формулы Гаусса

n	I	t_i	A_i
1	1	0	2
2	1;2	$\mp 0{,}57735027$	1
3	1;3	$\mp 0{,}77459667$	0,55555556
	2	0	0,88888889
4	1;4	$\mp 0{,}86113631$	0,34785484
	2;3	$\mp 0{,}33998104$	0,65214516
5	1;5	$\mp 0{,}906113631$	0,23692688
	2;4	$\mp 0{,}53846931$	0,47862868
	3	0	0,56888889
6	1;6	$\mp 0{,}93246951$	0,17132450
	2;5	$\mp 0{,}66120939$	0,36076158
	3;4	$\mp 0{,}23861919$	0,46791394
7	1;7	$\mp 0{,}94910791$	0,12948496
	2;6	$\mp 0{,}74153119$	0,27970540
	3;5	$\mp 0{,}40584515$	0,38183006
	4	0	0,41795918
8	1;8	$\mp 0{,}96028986$	0,10122854
	2;7	$\mp 0{,}79666648$	0,22238104
	3;6	$\mp 0{,}52553242$	0,31370664
	4;5	$\mp 0{,}18343464$	0,36268379

.

Рассмотрим использование квадратурной формулы Гаусса для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Делаем замену переменной

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt.$$

Применяя к этому интегралу квадратурную формулу Гаусса (1), имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \qquad (8)$$

где

$$x_i = \frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i \, (i = 1,2,\ldots,n),$$

t_i - нули полинома Лежандра $P_n(t)$, т.е. $P_n(t_i) = 0$.

Остаточный член формулы Гаусса с n узлами выражается следующим образом:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)}.$$

Схема вычисления интеграла по формуле Гаусса.

1. Определить значения узлов интегрирования x_i.
2. Определить значения подынтегральной функции в узлах интегрирования y_i.
3. Определить значения коэффициентов квадратурной формулы

$$C_i = \frac{b-a}{2}A_i.$$

4. Определить приближенное значение интеграла $\sum_{i=1}^{n} C_i y_i$.
5. Сделать оценку погрешности R_n.

Задание.

Просчитать интегралы по формуле Гаусса при $n = 6,7,8$.

Квадратурная формула Чебышева

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i), \tag{9}$$

где B_i - постоянные коэффициенты.

Чебышев предложил выбрать абсциссы t_i таким образом, чтобы:

1) коэффициенты B_i были равны между собой;
2) квадратурная формула (9) являлась точной для всех полиномов степени n включительно.

Найдем коэффициенты B_i и узлы t_i, полагая $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = B$. Возьмем функцию $f(t) = 1$, будем иметь

$$2 = \sum_{i=1}^{n} B_i,$$

откуда $B = 2/n$.

Следовательно, квадратурная формула Чебышева имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i). \tag{10}$$

Для определения абсцисс t_i заметим, что формула (10), согласно условию 2), должна быть точной для функций вида

$$f(t) = t, t^2, \ldots, t^n.$$

Подставляя эти функции в формулу (10), получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
t_1+t_2+\ldots+t_n&=0,\\
t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2&=\frac{n}{3},\\
t_1^3+t_2^3+\ldots+t_n^3&=0,\\
t_1^4+t_2^4+\ldots+t_n^4&=\frac{n}{5},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
t_1^n+t_2^n+\cdots+t_n^n&=\frac{n[1-(-1)^{n+1}]}{2(n+1)}
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

из которой могут быть определены неизвестные $t_i (i=1,2,\ldots,n)$. Решение системы (11) сводится к нахождению корней алгебраического уравнения степени n. В таблице 2 приведены значения корней t_i системы (11).

Таблица 3

Значения абсцисс в формуле Чебышева

n	i	t_i
2	1;2	$\mp 0,577350$
3	1;3 2	$\mp 0,707107$ 0
4	1;4 2;3	$\mp 0,794654$ $\mp 0,187592$
5	1;5 2;4 3	$\mp 0,832498$ $\mp 0,374541$ 0
6	1;6 2;5 3;4	$\mp 0,866247$ $\mp 0,422519$ $\mp 0,266635$
7	1;7 2;6 3;5 4	$\mp 0,883862$ $\mp 0,529657$ $\mp 0,323912$ 0

Чтобы применить квадратурную формулу Чебышева к интегралу вида

$$\int_a^b f(x)dx,$$

следует преобразовать его с помощью подстановки

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

переводящей отрезок $a \le x \le b$ в отрезок $-1 \le t \le 1$. Применяя к преобразованному интегралу формулу Чебышева (10), будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i; t_i$ - корни системы (11).

Задание

. Вычислить определенный интеграл по квадратурной формуле Чебышева при $n = 5,6,7$. Вычислить погрешность и построить график изменения погрешности при увеличении n.

Лабораторная работа № 4

Кубатурные формулы

Кубатурные формулы предназначены для вычисления двойных интегралов.

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной области (σ). В этой области выбирается система узлов $M_i(x_i, y_i)(i = 1,2,\ldots,N)$ (рис.6).

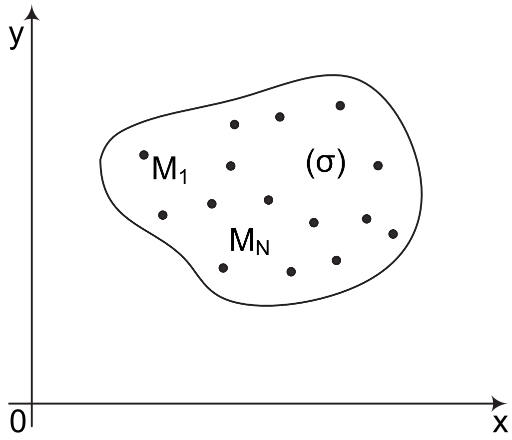

Рис.1.

Для вычисления двойного интеграла

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy$$

приближенно полагают:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i, y_i). \qquad (1)$$

Чтобы найти коэффициенты A_i, потребуем выполнения кубатурной формулы (1) для всех полиномов

$$P_n(x,y) = \sum_{k+l<n} c_{kl} x^k y^l, \qquad (2)$$

степень которых не превышает заданного числа n.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы формула (1) была точной для произведения степеней $x^k y^l (k, l = 0,1,2,\ldots,n; k + l \le n)$.

Полагая в (1) $f(x, y) = x^k y^l$, будем иметь:

$$I_{kl} = \iint\limits_{(\sigma)} x^k y^l dx\,dy = \sum_{l=1}^{N} A_i x_i^k y_i^l \qquad k, l = 0,1,\ldots,n; k + l < n). \tag{3}$$

Таким образом, коэффициенты A_i формулы (1), вообще говоря, могут быть определены из системы линейных уравнений (3).

Для того чтобы система (3) была определенной, необходимо, чтобы число неизвестных N было равно числу уравнений.
Отсюда, составляя «решетку показателей» (рис.2), получаем

$$N = (n+1) + n + \ldots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

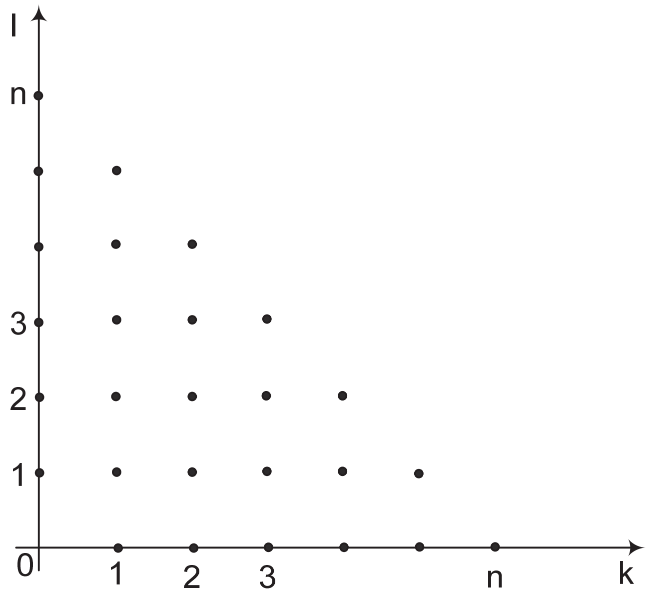

Рис.2.

Рассмотрим еще один прием вычисления двойного интеграла. Пусть область интегрирования ограничена непрерывными однозначными кривыми $y = \varphi(x), y = \psi(x) (\varphi(x) \le \psi(x) 0$ и двумя вертикалями $x = a, x = b$ (рис.3)

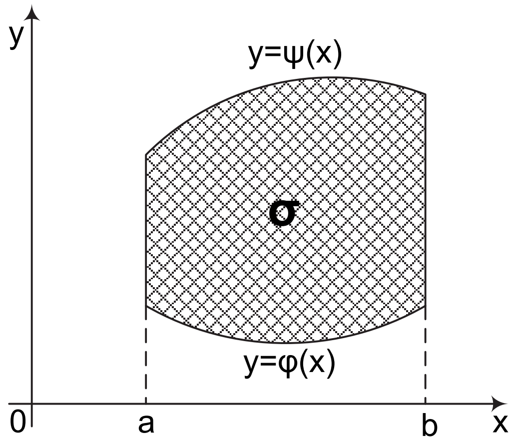

Рис.3.

Расставляя по известным правилам двойного интегрирования пределы интегрирования, будем иметь:

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (4)$$

Пусть

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (5)$$

Тогда

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b F(x)dx. \qquad (6)$$

Применяя к однократному интегралу, стоящему в правой части равенства (6), одну из квадратурных формул, получим:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i), \qquad (7)$$

где $x_i \in [a,b](i = 1,2,\ldots,n)$ и A_i - некоторые постоянные коэффициенты.

В свою очередь, значения

$$F(x_i) = \int\limits_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y)dy$$

могут быть найдены по некоторым формулам квадратур

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j),$$

где B_{ij} - соответствующие постоянные.

Из формулы (7) выводим:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j), \qquad (8)$$

где A_i и B_{ij} - известные постоянные.

Кубатурная формула Симпсона

Пусть сначала область интегрирования есть прямоугольник

$$R:[a \le x \le A; b \le y \le B],$$

стороны которого параллельны осям координат (рис.4).

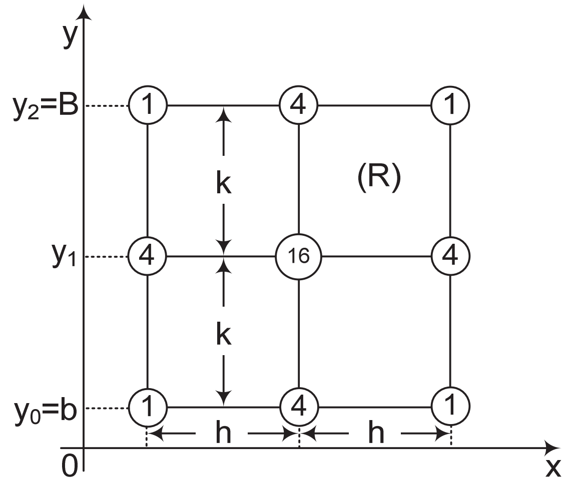

Рис.4.

Каждый из промежутков $[a,A]$ и $[b,B]$ разобьем пополам точками

$$x_0 = a, x_1 = a+h, x_2 = a+2h = A; y_0 = b, y_1 = b+k, y_2 = b+2k = B,$$

где

$$h = \frac{A-a}{2}, k = \frac{B-b}{2}.$$

Всего получим девять точек $(x_i, y_j)(i,j = 0,1,2)$. Имеем:

$$\iint_{(R)} f(x,y)dx\,dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy. \qquad (9)$$

Вычисляя внутренний интеграл по квадратурной формуле Симпсона, находим:

$$\iint_{(R)} f(x,y)dx\,dy = \frac{k}{3}\int_a^A [f(x,y_0) + 4f(x,y_1) + f(x,y_2)]dx =$$
$$= \frac{k}{3}\left[\int_a^A f(x,y_0]dx + 4\int_a^A f(x,y_1)dx + \int_a^A f(x,y_2)dx\right].$$

Применяя к каждому интегралу снова формулу Симпсона, получим:

$$\iint_{(R)} f(x,y)dx\,dy = \frac{hk}{9}\big[[f(x_0,y_0) + f(x_2,y_0) + f(x_0,y_2) + f(x_2,y_2)] +$$
$$+ 4[f(x_1,y_0 + f(x_0,y_1) + f(x_2,y_1) + f(x_1,y_2)] + 16f(x_1,y_1)\big]. \qquad (10)$$

Формулу (10) будем называть кубатурной формулой Симпсона. Следовательно,

$$\iint_{(R)} f(x,y)dx\,dy = \frac{hk}{9}(\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2), \qquad (11)$$

где σ_0 - сумма значений подынтегральной функции $f(x,y)$ в вершинах прямоугольника R, σ_1 - сумма значений $f(x,y)$ в срединах сторон прямоугольника R, $\sigma_2 = f(x_1, y_1)$- значение функции $f(x, y)$ в центре прямоугольника.

Если размеры прямоугольника R велики, то для увеличения точности кубатурной формулы область R разбивают на систему прямоугольников, к каждому из которых применяют кубатурную формулу Симпсона.

Положим, что стороны прямоугольника R разделили на n и m равных частей; в результате получилась относительно крупная сеть nm прямоугольников. Каждый из этих прямоугольников, в свою очередь, разделим на четыре равные части. Вершины этой мелкой сети примем за узлы M_{ij} кубатурной формулы. Пусть

$$h = \frac{A - a}{2n} \quad \text{и} \quad k = \frac{B - b}{2m}.$$

Тогда сеть узлов будет иметь следующие координаты:

$$x_i = x_0 + ih (x_0 = a; i = 0, 1, 2, \ldots, 2n) \text{ и } y_i = y_0 + jk (y_0 = b; j = 0, 1, 2, \ldots, 2m).$$

Для сокращения введем обозначение

$$f(x_i, y_j) = f_{ij}.$$

Применяя формулу (10) к каждому из прямоугольников крупной сети, будем иметь

$$\iint\limits_{(r)} f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \Big[(f_{2i,2j} + f_{2i+2,2j} + f_{2i+2,2j+2} + f_{2i,2j+2}) + $$
$$+ 4(f_{2i+1,2j} + f_{2i+2,2j+1} + f_{2i+1,2j+2} + f_{2i,2j+1}) + 16 f_{2i+1,2j+1} \Big].$$

Отсюда окончательно находим:

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y) = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \lambda_{ij} f_{ij}, \qquad (12)$$

где коэффициенты λ_{ij} являются соответствующими элементами матрицы

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если область интегрирования σ- криволинейная, то строим прямоугольник $R \supset \sigma$, стороны которого параллельны осям координат (рис.5).

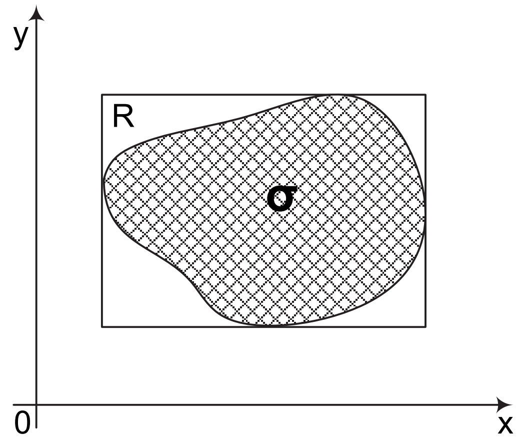

Рис.5.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f^{\bullet}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in \sigma; \\ 0, (x,y) \in R - \sigma. \end{cases}$$

В таком случае имеем:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{(R)} f^{*}(x,y)dx\,dy.$$

Последний интеграл может быть вычислен по кубатурной формуле (12).

Метод Монте-Карло

Одним из методов приближенного вычисления значений интегралов, при котором погрешность оценивается не гарантированно, а лишь с некоторой степенью достоверности, является метод Монте-Карло.

Пусть требуется вычислить приближенное значение интеграла

$$I(f) = \iint\limits_{(G)} f(P)dP.$$

Предположим, что каким-то образом удалось получить N случайных попарно независимых точек $P_1, \ldots, P_N$, равномерно распределенных в G. Обозначим через $M(s)$ математическое ожидание случайной величины s, а через $D(s)$ - ее дисперсию. Случайные величины $s_j = f(P_j)$ попарно независимы и одинаково распределены, причем

$$M(s_j) = \iint\limits_{(G)} f(P)dP = I(f)$$

и

$$D(s_j) = M(s_j^2) - (M(s_j))^2 = D(f),$$

где

$$D(f) = I(f^2) - (I(f))^2.$$

Положим

$$S_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} s_j.$$

Учитывая свойства величин s_j, имеем

$$M(S_N(f)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} M(s_y) = I(f),$$

$$D(S_N(f)) = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} ND(s_j) = \frac{1}{N}D(f).$$

С вероятностью $1-\eta$ выполняется неравенство Чебышева

$$|S_N(f)-I(f)| \le \sqrt{\frac{D(f)}{\eta N}}.$$

Полагая $\eta = 0{,}01$, получаем: с вероятностью 0,99 выполняется неравенство

$$|S_N(f)-I(f)| \le 10\sqrt{\frac{D(f)}{N}}.$$

Оценка получается лучше, если точки P_j не только попарно независимы, но и независимы в совокупности. Тогда, согласно центральной предельной теореме, случайная величина

$$\frac{S_N(f)-I(f)}{\sqrt{\frac{D(f)}{N}}}$$

распределена асимптотически нормально с функцией распределения

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

Таким образом, при больших значениях N выполняется неравенство

$$|S_N(f)-I(f)| \le y\sqrt{\frac{D(f)}{N}}.$$

Полагая $y=3$ и $y=5$, получаем, что неравенства

$$|S_N(f)-I(f)| \le 3\sqrt{\frac{D(f)}{N}} \quad \text{и} \quad |S_N(f)-I(f)| \le 5\sqrt{\frac{D(f)}{N}}$$

выполняются соответственно с вероятностями 0,997 и 0,99999. Сформулированные утверждения называются правилами «трех сигм» и «пяти сигм» соответственно.

Задание

Вычислить двойной интеграл аналитически, по формуле Симпсона, по методу Монте-Карло. Вычислить абсолютные погрешности приближенных методов интегрирования. Построить график зависимости абсолютной погрешности от числа узлов.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные мето ды. - М. Наука. 1987.-599с.
2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. -М. ГИФМЛ. 1959.-327с.
3. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. -М. Наука. 1966. -370с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т.1.-М.Наука.1976.-303с.
5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. -М. Наука.1988.-255с

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Вычислить интегралы

1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx, n = 10;$ $\int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}dx.$

2) $\int_0^1 e^{x^2}dx, n = 10;$ $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx.$

3) $\int_0^1 (3x^2 - 4x)dx, n = 4;$ $\int_0^{0,5} \frac{(arctgx)^2}{x}dx.$

4) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x}, n = 8;$ $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{1-0,25\sin^2 x}}.$

5) $\int_1^5 \frac{dx}{x}, n = 6;$ $\int_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-0,25x^2}{1-x^2}}dx.$

6) $\int_0^{1,2} \ln(1+x^2)dx, n = 6;$ $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx.$

7) $\int_0^1 \sin x^2 dx, n = 10;$ $\int_0^1 \sqrt{x}\cos x\,dx.$

8) $\int_0^1 \cos x^2 dx, n = 10;$ $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+x+\sqrt{\sin x}}.$

9) $\int_4^{5,2} \ln x\,dx, n = 6;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}.$

10) $\int_1^3 \frac{dx}{1+4}, n = 4;$ $\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}.$

11) $\int\limits_{0,1}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x}}, n = 10;$ $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}.$

12) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx, n = 6;$ $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$

13) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}, n = 6;$ $\int\limits_{0}^{1} e^{-5x^3+x+0,5} dx.$

14) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, n = 10;$ $\int\limits_{0}^{1} e^{-4x^3+2x+1} dx.$

15) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^3}, n = 8;$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1} dx.$

16) $\int\limits_{1}^{2} x \lg x \, dx, n = 10;$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx.$

17) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\lg x}{x} dx, n = 10;$ $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-0,5\sin^2 x}\, dx.$

18) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\cos x}{x} dx, n = 8;$ $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 0,1x}{x}.$

19) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx, n = 8;$ $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx.$

20) $\int\limits_{0}^{0,2} \cos\frac{\pi x^2}{2} dx, n = 8;$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-x^2} \sin 0,5x}{0,5+x^2} dx.$

21) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1`+x^2} dx, n = 8;$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{0,5+x^2}}{1+\cos 0,5x} dx.$

22) $\int_0^1 \frac{arctgx}{x} dx, n = 10;$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 0,15x}{x} dx.$

23) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - 0,25x^2}}, n = 6;$ $\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,15x}}{x} dx.$

24) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - 0,75x^2}}, n = 8;$ $\int_0^1 \frac{\sin 0,6x}{x^2 + 0,6} dx.$

2. Вычислить кратные интегралы

1) $\iint_D xy\,dx\,dy;$ $D: x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0.$

2) $\iint_D e^{x+y} dx\,dy;$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 2.$

3) $\iint_D \frac{x^2}{1 + y^2} dx\,dy;$ $D: x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0.$

4) $\iint_D xy\,dx\,dy;$ $D: x + y \le 1, x - y \le 1, x \ge 0.$

5) $\iint_D e^{x+y} dx\,dy;$ $D: y \ge x^2, y \le 4 - x^2.$

6) $\iint_D \frac{x^2}{1 + y^2} dx\,dy;$ $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1.$

7) $\iint_D xy\,dx\,dy;$ $D: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \le 4.$

8) $\iint_D e^{x+y} dx\,dy;$ $D: y = x^2, y = \sqrt{x}.$

9) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy;\quad D: y = x, y = 2x, x + y = 6.$

10) $\iint\limits_D xydxdy;\qquad D: y = x, y = x + 3, y = -2x + 1, y = -2x + 5.$

11) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy;\qquad D: y - 2x \le 0, 2y - x \ge 0, xy \le 2.$

12) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy;\qquad D: y^2 \le 8x, y \le 2x, y + 4x - 24 \le 0.$

13) $\iint\limits_D xydxdy;\qquad D: y^2 - x^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, (0,0) \in D.$

14) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy;\qquad D: x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0.$

15) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy;\qquad D: x = 0, y = 0, x + y = 2.$

16) $\iint\limits_D xydxdy;\qquad D: x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0.$

17) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy;\qquad D: x + y \le 1, x - y \le 1, x \ge 0.$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Квадратурные и кубатурные формулы

Методические указания
к выполнению лабораторных вычислительных работ
по курсу «Квадратурные и кубатурные формулы

Редактор Т.В. Веденеева
Технический редактор Н.А. Волкова
Корректор Н.А. Сидельникова
Компьютерная верстка С.П.Черновой

ИД № 06494 от 26.12.01
Сдано в производство 21.02.07. Формат $60\times84\,{}^1\!/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,55
Уч.-изд. Л. 3,05. Тираж 100. Заказ № 113. «С» 18.

Издательство Пензенского государственного университета.
440026, Пенза, Красная, 40